# PART3　対数の大小，対数関数の最大・最小

**3**　[1]　$\log_{\frac{1}{2}}3$，$\log_5 3$，$\log_7 3$，$\log_{\frac{1}{2}}5$ の大小を比較せよ。

[2]　次の関数の最大値と最小値，およびそのときの $x$ の値を求めよ。

(1)　$y=\left(\log_2 \dfrac{x^2}{4}\right)\left(\log_2 \dfrac{4}{x}\right)$ $(2 \leqq x \leqq 8)$

(2)　$y=\log_2(-x^2+4x+4)$ $(0 \leqq x \leqq 3)$

**Point Pickup**

[1]　$a>1$ のとき　$p>1 \iff \log_a p>0$　　$0<p<1 \iff \log_a p<0$

$0<a<1$ のとき　$p>1 \iff \log_a p<0$　　$0<p<1 \iff \log_a p>0$

であることを利用し，対数の正負で分類してから，底を揃えて大小比較をするとよい。

[2]　(1)　$\log_2 x=t$ とおくと，与えられた関数は $t$ の 2 次関数となる。$t$ のとり得る値の範囲に注意。

(2)　$a>1$ のとき

$$p<q \iff \log_a p<\log_a q$$

であることから，真数が最大，最小になるときを考えればよい。

# 第12講　PART3　確認問題

**1**　$\log_{0.3}5$，$\log_2 5$，$\log_3 5$，$\log_{0.3}3$ の大小を比較せよ。

[ア] < [イ] < [ウ] < [エ]

①　$\log_{0.3}5$　②　$\log_2 5$　③　$\log_3 5$　④　$\log_{0.3}3$

次の関数の最大値，最小値と，そのときの $x$ の値を求めよ。

**2**　$y=\left(\log_3\dfrac{x^4}{9}\right)\left(\log_3\dfrac{9\sqrt{3}}{x}\right)$　$(1\leqq x\leqq 9)$

$x=$ [オ] $\sqrt{\text{[カ]}}$ のとき　最大値 [キ]

$x=$ [ク] のとき　最小値 [ケコ]

**3**　$y=\log_3(2x^2-8x+9)$　$(1\leqq x\leqq 4)$

$x=$ [サ] のとき　最大値 [シ]

$x=$ [ス] のとき　最小値 [セ]

# PART3　対数の大小，対数関数の最大・最小

**3**　[1]　$\log_{\frac{1}{2}}3$，$\log_5 3$，$\log_7 3$，$\log_{\frac{1}{2}}5$ の大小を比較せよ。

[2]　次の関数の最大値と最小値，およびそのときの $x$ の値を求めよ。

(1)　$y=\left(\log_2\dfrac{x^2}{4}\right)\left(\log_2\dfrac{4}{x}\right)$ $(2\leqq x\leqq 8)$

(2)　$y=\log_2(-x^2+4x+4)$ $(0\leqq x\leqq 3)$

[1]　$\log_{\frac{1}{2}}3$ と $\log_{\frac{1}{2}}5$ について

底 $\dfrac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さく，かつ $1<3<5$ であるから

$$\log_{\frac{1}{2}}5<\log_{\frac{1}{2}}3<0$$

$\log_5 3$ と $\log_7 3$ について　$\log_5 3=\dfrac{1}{\log_3 5}$，$\log_7 3=\dfrac{1}{\log_3 7}$

底 3 は 1 より大きく，かつ $1<5<7$ であることから　$0<\log_3 5<\log_3 7$

よって　$0<\dfrac{1}{\log_3 7}<\dfrac{1}{\log_3 5}$　であるから

$$0<\log_7 3<\log_5 3$$

したがって　$\log_{\frac{1}{2}}5<\log_{\frac{1}{2}}3<\log_7 3<\log_5 3$

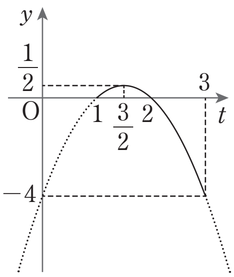
[2]　(1)　$y=\left(\log_2\dfrac{x^2}{4}\right)\left(\log_2\dfrac{4}{x}\right)=(\log_2 x^2-\log_2 4)(\log_2 4-\log_2 x)$

$=(2\log_2 x-2)(2-\log_2 x)$

$\log_2 x=t$ とおくと　$2\leqq x\leqq 8$　より　$1\leqq t\leqq 3$

このとき，$y$ の式は

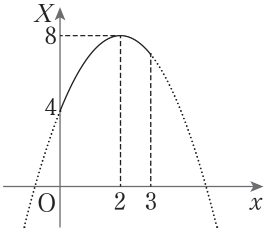
$$y=(2t-2)(2-t)=-2t^2+6t-4=-2\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$




$t=\dfrac{3}{2}$　つまり　$\log_2 x=\dfrac{3}{2}$　より　$x=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$ のとき　最大値 $\dfrac{1}{2}$

$t=3$　つまり　$\log_2 x=3$　より　$x=2^3=8$ のとき　最小値 $-4$

(2)　$X=-x^2+4x+4$ とおくと　$X=-(x-2)^2+8$




$0 \leqq x \leqq 3$　より　$4 \leqq X \leqq 8$

このとき　$y=\log_2\left(-x^2+4x+4\right)=\log_2 X$ は

$X=8$ つまり $x=2$ のとき　最大値 $\log_2 8=3$

$X=4$ つまり $x=0$ のとき　最小値 $\log_2 4=2$

をとる。

# 第 12 講　PART3　確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：①，イ：④，ウ：③，エ：②

**[解説]**

$\log_{0.3}5$ と $\log_{0.3}3$ について [A]

底 0.3 は 1 より小さく，かつ真数について

$1<3<5$ であるから

$$\log_{0.3}5<\log_{0.3}3<0$$ [B]

$\log_2 5$ と $\log_3 5$ について

$$\log_2 5=\frac{1}{\log_5 2},\quad \log_3 5=\frac{1}{\log_5 3}$$ [C]

底 5 は 1 より大きく，かつ真数について

$1<2<3$ であるから

$$0<\log_5 2<\log_5 3$$ [B]

よって　$0<\dfrac{1}{\log_5 3}<\dfrac{1}{\log_5 2}$

すなわち　$0<\log_3 5<\log_2 5$

したがって

$$\boldsymbol{\log_{0.3}5<\log_{0.3}3<\log_3 5<\log_2 5}$$

[A]　対数の正負で分類。

$a>1$ のとき

$p>1 \Longleftrightarrow \log_a p>0$

$0<p<1 \Longleftrightarrow \log_a p<0$

$0<a<1$ のとき

$p>1 \Longleftrightarrow \log_a p<0$

$0<p<1 \Longleftrightarrow \log_a p>0$

[B]　対数の大小に関する性質

$a>1$ のとき

$p<q \Longleftrightarrow \log_a p<\log_a q$

$0<a<1$ のとき

$p<q \Longleftrightarrow \log_a p>\log_a q$

[C]　$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

## 2 [正解] オ：3，カ：3，キ：4，ク：1，ケコ：−5

**[解説]**

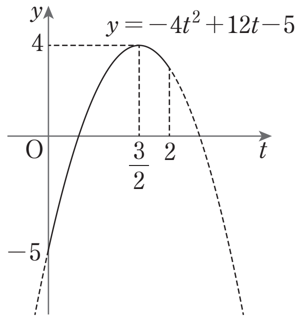
$$y=\left(\log_3\frac{x^4}{9}\right)\left(\log_3\frac{9\sqrt{3}}{x}\right)$$
$$=(\log_3 x^4-\log_3 9)(\log_3 9\sqrt{3}-\log_3 x)$$ [D]
$$=(4\log_3 x-2)\left(\frac{5}{2}-\log_3 x\right)$$

$\log_3 x=t$ とおくと，$1\leqq x\leqq 9$ より [E]

$$\log_3 1\leqq \log_3 x\leqq \log_3 9$$
$$0\leqq t\leqq 2$$

このとき，$y$ の式は

$$y=(4t-2)\left(\frac{5}{2}-t\right)=-4t^2+12t-5$$
$$=-4\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+4$$




よって，$0\leqq t\leqq 2$ の範囲において，

$y$ は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき最大，$t=0$ のとき最小となる。

$t=\dfrac{3}{2}$ のとき，$\log_3 x=\dfrac{3}{2}$ より　$x=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$

$t=0$ のとき，$\log_3 x=0$ より　$x=1$

したがって

$x=\mathbf{3\sqrt{3}}$ のとき　最大値 **4**

$x=\mathbf{1}$ のとき　最小値 **−5**

[D]　対数の性質
$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$ で，$k$ は実数のとき

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$$
$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$
特に $\log_a\dfrac{1}{N}=-\log_a N$
$$\log_a M^k=k\log_a M$$

[E]　$t$ に置き換えて，$t$ の 2 次関数として最大値，最小値を求める。$t$ のとりうる値の範囲に注意。

**3** **[正解]** サ：4，シ：2，ス：2，セ：0

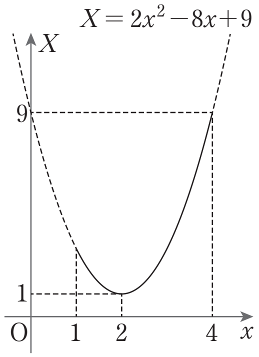
**[解説]**

$X=2x^2-8x+9$ とおくと

$$X=2(x-2)^2+1$$

$1\leqq x\leqq 4$ より　$1\leqq X\leqq 9$ [F]

［F］　真数が最大，最小になるときを考える。




ゆえに，$y=\log_3\left(2x^2-8x+9\right)=\log_3 X$ は

$X=9$ すなわち $x=4$ のとき [B]

最大値 $\log_3 9=\mathbf{2}$

$X=1$ すなわち $x=\mathbf{2}$ のとき

最小値 $\log_3 1=\mathbf{0}$

をとる。